Introducción a la Teoría de Categorías

José Ramírez-Gómez

Mentor: Mateo Torres Ruiz

Pares Ordenados

2024

Motivación

La teoría de categorías:

- Usualmente se le llama "la matemática de la matemática".
- También se dice que es un "sinsentido abstracto"
- Proporciona una "vista aérea de la matemática".
- Permite unificar conceptos que, a primera vista, parecen diferentes.
- Proporciona un lenguaje para desarrollar teorías generales que pueden aplicarse en múltiples contextos.

¿Qué es una categoría?

Definition (Categoría)

Una categoría $\mathcal{C}$ está compuesta de:

- Una colección de objetos, $Obj(\mathcal{C})$, que denotaremos con las letras A, B, C, etc.
- Una colección de flechas o morfismos, $Mor(\mathcal{C})$, que denotaremos con las letras f, g, h, etc.
- Dos mapeos, $dom, cod : Mor(\mathcal{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, que asignan a cada flecha f su dominio $dom(f)$ y codominio $cod(f)$. Para una flecha f con dominio A y codominio B escribiremos $f : A \to B$. Y para cada par de objetos A, B definimos el conjunto

  $$\mathcal{C}(A, B) := \{f \in Mor(\mathcal{C}) \mid f : A \to B\}$$

  al que llamaremos *Hom-set* y también escribiremos como $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.

¿Qué es una categoría?

Definition (Categoría)

- Para cualquier terna de objetos A, B, C, la composición de morfismos,

$$C_{A,B,C} : \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C).$$

  Dados $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$, escribiremos $g \circ f$ para denotar $\mathcal{C}_{A,B,C}(f, g)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

- Para cada objeto A, una flecha identidad, $\mathbf{1}_A : A \to A$.

¿Qué es una categoría?

Definition (Categoría)

Tales que se satisfagan los siguientes axiomas:

- Asociatividad: para cualesquiera morfismos $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, se cumple que

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h \circ g"] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

¿Qué es una categoría?

Definition (Categoría)

- Identidades: para cualquier morfismo $f : A \to B$ se cumple que

$$f \circ \mathbf{1}_A = f = \mathbf{1}_B \circ f.$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "1_A"] \arrow[rrr, "f"] & & & B \arrow[loop right, "1_B"] \end{tikzcd}$$

¿Qué es una categoría?

Example

- Set: Los objetos son conjuntos y los morfismos son funciones entre conjuntos.
- Pos: Los objetos son conjuntos parcialmente ordenados y los morfismos son funciones monótonas.
- Top: Los objetos son espacios topológicos y los morfismos son los mapeos continuos.
- Grp: Los objetos son grupos y morfismos son homomorfismos de grupos.

¿Qué es un functor?

Definition (Functor)

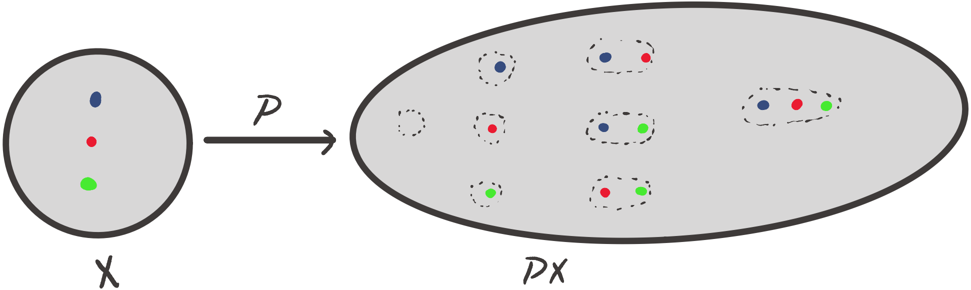
Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ está dado por:

- Un mapeo de objetos, que asigna un objeto $F(A)$ en $\mathcal{D}$ a cada objeto A de $\mathcal{C}$.
- Un mapeo de flechas que asigna un morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ en $\mathcal{D}$ a cada morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$ de tal forma que se preserven las identidades y composiciones, es decir: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ y $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Un ejemplo

Example

En Set podemos definir el (endo)functor potencia $\mathcal{P} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ cuyo mapeo de objetos envía un objeto X a su conjunto potencia $\mathcal{P}X$ y el mapeo de morfismos envía una función $f : X \to Y$ a la imagen directa $\mathcal{P}f : \mathcal{P}X \to \mathcal{P}Y$.



Conclusiones

- La teoría de categorías no solo es una herramienta teórica poderosa sino que también tiene aplicaciones prácticas en diversas disciplinas.
- Su capacidad para unificar y generalizar conceptos facilita la comprensión y el desarrollo de nuevas teorías.
- Estudiar teoría de categorías amplía la perspectiva y profundiza la comprensión de las matemáticas.
- Pares Ordenados es una iniciativa que fomenta el conocimiento matemático y la investigación.

Referencias

S. Abramsky and N. Tzevelekos.
Introduction to Categories and Categorical Logic, page 3–94.
Springer Berlin Heidelberg, 2010.
ISBN 9783642128219.
doi: 10.1007/978-3-642-12821-9_1.
URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-12821-9_1.

S. Awodey.
Category Theory.
Oxford Logic Guides. OUP Oxford, 2010.
ISBN 9780191612558.

Tom Leinster.
Basic category theory, 2016.